Hasar Sayısının Modellenmesi

Sigortacılar için önemli bir husus, sigorta sözleşmeleri kapsamında üstlenilen toplam hasarların büyüklüğünü tahmin etmektir. Toplam hasar, sigortalı olayın hem sıklığından hem de büyüklüğünden etkilendiği için toplam hasarın, bu iki bileşene ayrıştırılması, analiz ve fiyatlandırma açısından önemlidir.

Bir sigorta ürününün fiyatını belirlemek imalatta bir ürünün fiyatını belirlemek kadar kolay değildir. Bu nedenle öncelikle sigorta ürününün beklenen hasar sayısı ile herbir hasarın tutarının çarpımından oluşan beklenen maliyeti yani risk primi belirlenir. Risk primine, kullanılan varsayımlarda olası sapmalar için ilave yapılarak net prim hesaplanır. Net prime masraflar ve şirketin kar marjı eklenerek sigorta ürününün fiyatı yani brüt prim belirlenmiş olur.

Bu bölümde hasar sayısı modellenirken kullanılan dağılımlardan olan Binom dağılımı, Poisson dağılımı ve Negatif Binom Dağılımına değinilecektir. Bu dağılımlar (a, b, 0) ailesinden gelen dağılımlar olduğu için (a, b, 0) ailesinin yapısı ele alınacaktır.

Sigorta verisinde sıfırdaki gözlem sayısı, belirli bir olayın meydana gelmediğini gösterir. Bazı veri kümeleri için incelenen olayın sıfır olması imkansız olabilir veya sıfır olayın ortaya çıkması olasılığı 1, 2, … olayın ortaya çıkma olasılığınının hesaplanabildiği modelden farklı bir modele uyabilir. Her iki durumda da Poisson, Negatif Binom gibi bir dağılımın verinin modellenmesi amacıyla doğrudan kullanımı yanlış tahminlere yol açabilir. Bu dağılımların sıfırda kesilmiş (zero-truncated) ya da sıfırda modifiye edilmiş (zero-modified) biçimlerinin kullanımı veriye daha iyi uyum sağlar.

Sigorta portföyü her biri kendine özgü özellikleri olan farklı alt gruplardan oluşabilir. Bu durumda portföydeki heterojenlik karışım dağılımlarının kullanımını gerektirebilir.

**Poisson Dağılımı**

Poisson dağılımı, olayların meydana gelme hızının sabit olması durumunda (yani birim zamanda ortaya çıkması beklenilen olay sayısının değişmemesi durumunda) belirli bir zaman diliminde rasgele ortaya çıkan olayların modellenmesi amacıyla kullanılan bir dağılımdır.

 ve  için Binom dağılımı asimtotik olarak Poisson dağılımına yakınsar.

Portföyde yer alan sigortalıların beklenen hasar sayılarının aynı olduğunu düşünmek genellikle mümkün olamayacağından yani beklenen hasar sayısı gösteren  bir risk biriminden diğerine değişkenlik göstereceğinden, Poisson dağılımı genellikle hasar sayısı verilerine iyi uyum sağlamamaktadır. Ancak yeni bir dağılım elde etmede de kullanılan temel bir dağılım olduğu için burada yer verilmiştir.

N hasar sayısını gösteren raslantı değişkeni  parametreli Poisson dağılımlı bir raslantı değişkeni olsun. Bu durumda olasılık fonksiyonu



Beklenen Değeri Varyansı



**Örnek:** Poisson dağılımının moment çıkaran fonksiyonu ve olasılık çıkaran fonksiyonunu bulalım.

Moment Çıkaran Fonksiyonu 

Olasılık Çıkaran Fonksiyonu 

**Poisson Dağılımlı Raslantı Değişkenlerininin Toplamının Dağılımı**

 raslantı değişkenleri sırasıyla  parametreleri ile Poisson dağılımlı bağımsız raslantı değişkenleri ise  raslantı değişkeni  parametreli Poisson dağılımlıdır.

**Tanıt:**



**Örnek:**

Bir sigorta şirketinden yangın poliçesi satın alan 1000 sigortalı bir yılda 20 hasar ve deprem poliçesi satın alan 2000 sigortalı iki yılda 50 hasar bildirmiştir. Her iki branşta bildirilen hasar sayıları Poisson dağılımlıdır.

1. Deprem poliçesi satın alan bir sigortalının bir yılda 1 ve daha fazla hasar bildirmesi olasılığını hesaplayınız.
2. Yangın ve deprem risklerinin bağımsız olduğu varsayıldığında şirketin bir yılda beklenen hasar sayısını bulunuz.

**Çözüm:**

Yangın poliçesi satın alan bir sigortalının bir yılda ortalama hasar sayısı olduğu için 

Deprem poliçesi satın alan bir sigortalının bir yılda ortalama hasar sayısı olduğu için 

1. 
2. 

**Örnek:**

A bankası konut ve öğrenim kredisi vermektedir. Bu bankada verilen toplam kredi sayısı 23 ortalamalı Poisson dağılımlı olup verilen kredinin %28’i öğrenim kredisidir. B bankası konut, öğrenim ve araç kredisi vermektedir. Bu bankada verilen toplam kredi sayısı 45 ortalamalı Poisson dağılımlı olup verilen kredilerin %21’i öğrenim kredisi ve %53’ü ise konut kredisidir. Bu iki banka birleşme kararı aldığına göre birleşme sonrası öğrenim kredisinin dağılımını belirleyiniz.

**Çözüm:**

A Bankasından öğrenim kredisi alanların sayısı (23)(%28) = 6.44 ortalamalı Poisson dağılımlı

B Bankasından öğrenim kredisi alanların sayısı (45)(%21) = 9.45 ortalamalı Poisson dağılımlı

Birleşme sonrası öğrenim kredisi alanların sayısı 6.44+9.45 =15.89 ortalamalı Poisson dağılımlıdır.

**Binom Dağılımı (İki terimli Dağılım)**

Binom dağılımı başarı/başarısızlık, ölüm/ yaşam gibi iki sonucu olan özdeş ve bağımsız denemenin sonlu tekrarıyla elde edilen bir dağılımdır.

Bir portföyde herbiri aynı yaşta n sigortalı olduğunu düşünelim. Bu n sigortalıdan bir yıl içinde ölenlerin yakınlarına ölüm tazminatı ödensin. Bir yılda kaç sigortalının öleceği ve dolayısıyla ne kadar ödeme yapılacağı sorularının cevabı Binom dağılımı yardımıyla verilebilir. Herhangi bir hastalığa yakalanma olasılığı aynı olan n birey olsun. Bu bireyler bu hastalığa yakaladıklarında sağlık giderinin ödeneceği bir yıllık sağlık poliçesi satın alsınlar. Bu durumda bir yılda kaç kişinin bu hastalığa yakalanacağı ve hastalığa yakalananlara yapılması beklenen ödeme Binom dağılımı kullanılarak hesaplanabilir.

N hasar sayısını gösteren raslantı değişkeni n ve q parametreleri ile Binom dağılımlı bir raslantı değişkeni olsun. Bu durumda olasılık fonksiyonu







**Örnek:** Binom Dağılımının moment çıkaran fonksiyonunu ve olasılık çıkaran fonksiyonunu bulalım.

Moment Çıkaran Fonksiyonu

Olasılık Çıkaran Fonksiyonu 

**Örnek:**

Aynı yaşta ve bir yılda belirli bir hastalığa yakalanma olasılığı q olan 1000 kişi bir yıllık bir sağlık poliçesi satın alsın. Bir bireyin bir yılda bir kez sağlık poliçesinden yaralanması olasılığı, hiç yararlanmama olasılığının 3 katı olduğuna göre bir yılda iki kez sağlık hizmetinden yaralanma olasılığını hesaplayınız.

**Çözüm:**









**Negatif Binom Dağılımı**

İki sonucu olan bir denemenin n kez tekrarı ile Binom dağılımını elde etmiştik. İki sonucu olan bir denemenin tekrarında r inci istenmeyen sonuçla karşılaşıncaya kadar istenen sonucun ortaya çıkması sayısının dağılımı Negatif Binom dağılımına uyar. Bu dağılım daha sonra yeni dağılım elde etmede kullanılan yöntemler anlatıldığında görüleceği üzere Poisson dağılımının parametresi ’nın Gamma dağılımlı bir raslantı değişkeni olduğu varsayıldığında elde edilen bir karışık dağılımdır.

N hasar sayısını gösteren raslantı değişkeni *r* ve *p* parametreleri ile Negatif Binom dağılımlı bir raslantı değişkeni olsun. Bu durumda olasılık fonksiyonu



 alınırsa r ve  parametreleri ile Negatif Dağılımın olasılık fonksiyonu



olarak da ifade edilir.

Beklenen Değeri Varyansı



Moment Çıkaran Fonksiyonu 

Olasılık Çıkaran Fonksiyonu 

**Geometrik Dağılım**

*r* = 1 olduğunda Negatif Binom dağılımı Geometrik dağılım olarak adlandırılır. Geometrik dağılımın olasılık fonksiyonu



ya da



biçimindedir.

**Soru:** Geometrik dağılımının beklenen değeri ve varyansı ile moment çıkaran ve olasılık çıkaran fonksiyonlarını elde ediniz.

**(a, b, 0) Dağılım Ailesi**

a ve b sabit sayı olmak üzere negatif değerler almayan N kesikli raslantı değişkeni için



eşitliği sağlanıyorsa bu raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu (a, b, 0) dağılım ailesinin bir üyesidir.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Dağılım** | **a** | **b** |
| **Binom** |  |  |
| **Poisson** | 0 |  |
| **Negative Binom** |  |  |
| **Geometrik** |  | 0 |

**Örnek :**  parametreli Poisson dağılımının (a, b, 0) dağılım ailesinin bir üyesi olduğunu gösterelim.

**Çözüm:**

 ve 

olduğundan  olarak elde edilir. Buradan  parametreli Poisson dağılımının  ile (a, b, 0) dağılım ailesinin bir üyesi olduğu görülmektedir.

**Soru:** Binom, Negatif Binom ve Geometrik dağılımlarının (a, b, 0) dağılım ailesinin bir üyesi olduğunu gösteriniz.

**Not**: Buraya kadar tanım kümesi negatif olmayan tamsayılar kümesinden oluşan Binom, Poisson, Negatif Binom ve Geometrik dağılımları inceledik. Bu dağılımlarda parametrelerin yaş, cinsiyet, coğrafi konum (bölge) ve benzeri gibi bilinen açıklayıcı değişkenlerin bir fonksiyonu olarak ifade edilmesi durumunda hasar olasılıkları bu değişkenler yardımıyla açıklanabilir. Bu durumda hasar olasılıkları regresyon analizi ile modellenmiş olur.

**Sıfırda Düzenlenmiş ya da Düzenlenmiş Dağılımlar**

Bazı sigorta verilerinde, sıfır hasarın ortaya çıkma olasılığı yukarıda bahsedilen dağılımlardan elde edilen olasılıklardan farklı olabilir. Bu durumda yukarıda ele alınan dağılımlar sıfır hasar için keyfi bir olasılığın atanmasına izin verilecek şekilde yeniden düzenlenir yani modifiye edilir. Bu durumda (a, b, 1) dağılım ailesinden bir dağılım elde edilmiş olur.

**(a, b, 1) Dağılım Ailesi**

a ve b sabit sayı olmak üzere negatif değerler almayan N kesikli raslantı değişkeni için



yinelemeli eşitliği sağlanıyorsa bu raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu (a, b, 1) dağılım ailesinin bir üyesidir.

Bu sınıfa ait bir dağılımda ’ın sıfır olması gerekmez.

 (a, b, 0) dağılım ailesinden bir olasılık fonksiyonu ve , ’nın modifikasyonu olan (a, b, 1) dağılım ailesinden bir olasılık fonksiyonu olsun. c sabit olmak üzereolarak yazılabilir.

’in olasılık fonksiyonu olabilmesi için c sabiti



olarak elde edilir.

Bu durumda  sıfırda modifiye edilmiş dağılım olarak adlandırılır.

Eğer  ise  sıfırda kesilmiş dağılım olarak adlandırılır.

**Örnek:** Hasar sayısının dağılımıolsun.  olduğuna göre sıfırda modifiye edilmiş Binom ve sıfırda kesilmiş Binom dağılımını elde ediniz.

**Çözüm:**





 alındığında  eşitliği kullanılarak sıfırda modifiye edilmiş Binom dağılımı elde edilir.

 alındığında sıfırda kesilmiş Binom dağılımı elde edilir.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **k** | **Binom Dağılımı** | **Sıfırda Modifiye Edilmiş Binom Dağılımı** | **Sıfırda Kesilmiş Binom Dağılımı** |
| 0 | 0.2401 | 0.4 | 0 |
| 1 | 0.4116 | 0.3250 (0.4116 x 0.7896) | 0.5417 (0.4116 x 1.316) |
| 2 | 0.2646 | 0.2089 (0.2646 x 0.7896) | 0.3482 (0.2646 x 1.316) |
| 3 | 0.0756 | 0.0597 (0.0756 x 0.7896) | 0.0995 (0.0756 x 1,316) |
| 4 | 0.0081 | 0.0064 (0.0081 x 0.7896) | 0.0107 (0.0081 x 1.316) |